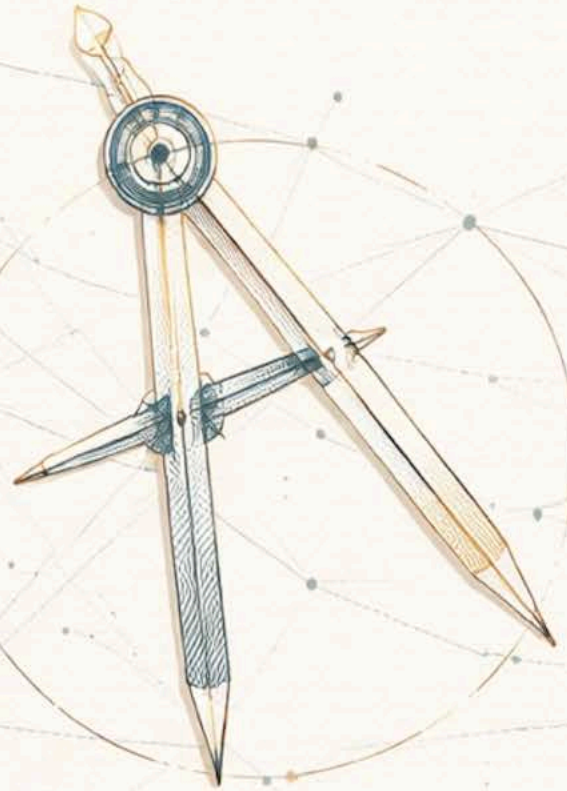
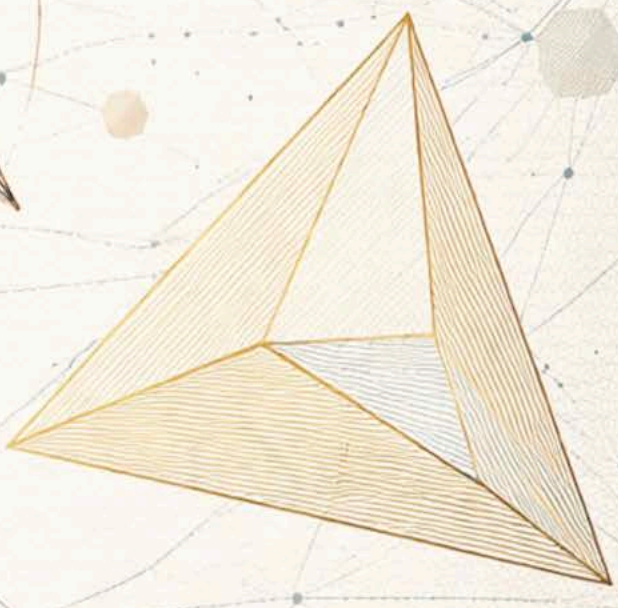
रेखागणित का इतिहास

थेल्स से यूक्लिड तक

जॉर्ज जॉन्स्टन ऑलमैन





अनुवाद:

डॉ. बिभाष कुमार श्रीवास्तव

रेखागणित का इतिहास

(थेल्स से यूक्लिड तक)

जॉर्ज जॉन्स्टन ऑलमैन

अनुवाद:

डॉ. बिभाष कुमार श्रीवास्तव

प्रकाशक: नॉटनल

प्रकाशन: जनवरी, 2026

© डॉ. बिभाष कुमार श्रीवास्तव

अनुक्रमणिका

प्रस्तावना	2
अनुवादक का वक्तव्य	5
भूमिका	8
थ़ेल्स (थ़ालेस)	15
पाइथ़गोरस और उनका मत (school)	29
पाँचवीं शताब्दी ईपू के ज्यामितिज्ञ, हिपॉक्रटीस ऑफ़ कियॉस: डिमॉक्रिटस	86
आर्चिदास	155
ईयुडोकस	191
ईयुडोकस के उत्तराधिकारी	231
ईयुडोकस के उत्तराधिकारी	265
ईयुडोकस के उत्तराधिकारी	284
तियटीटस (Theaetetus)	303
टिप्पणियाँ एवं परिशिष्ट	316
तालिका	337

प्रस्तावना

(जैसा पुस्तक में लिखा गया है)

यह पुस्तक एक पेपर का पुनर्लेखन है, जो कि पिछले ग्यारह सालों के दौरान Hermathena में कई हिस्सों में प्रकाशित हुआ था। इसे सक्षम विद्वानों और इस उपमहाद्वीप के हमारे देश द्वारा हाथों हाथ लिया गया, और जगह जगह लोगों की इच्छा के अनुरूप कि इसे एक जिल्द में इकट्ठा करके प्रकाशित किया जाए, यह पुस्तक प्रकाशित हो रही है।

मैंने अध्यायों की शुरुआत में सरनामा (headings) को जोड़ दिया है और अतिरिक्त नए रेखांकन भी शामिल कर दिया है। मैंने कुछ नोट्स और अनुक्रमणिका भी जोड़ दिया है। नए रूप में कुछ परिवर्तन भी आवश्यक हो गए थे। मैंने कुछ सुधार भी किया है जिनको अधिकतर जगहों पर ब्रैकेट में प्रस्तुत किया गया है। इन अपवादों को छोड़कर पुस्तक की इबारत वही है जो Hermathena के पेपर का है। इस पेपर में संदर्भों को सटीकता सुनिश्चित करने के लिए बहुत मेहनत की गई थी, इनकी फिर से जाँच की गई है, और मुझे पूरा विश्वास है कि अब ये विश्वसनीय हैं।

आद्योपांत, मेरा उद्देश्य रहा है कि मूल स्रोतों से मालूम तथ्यों को स्पष्ट रूप से प्रस्तुत किया जाए, और इनमें और अटकलबाज़ियों, जो कि चाहे जितना भी सम्भावित लगें, के बीच स्पष्ट भेद किया जाए।

मुखपृष्ठ की आवक्ष मूर्ति का चित्र *Thesaurus Graecarum Antiquitatum* Vol. II, Tab. 49 से लिया गया है। इसके नीचे खुदी इबारत इस प्रकार है:—

ARCHYTAS

Pythagoricus Mechanicis Clarus

Ex Nummo aereo apud Fulvium Ursinum.

(इसका हिंदी तात्पर्य कुछ इस प्रकार है:

आर्चिदास

जो कि एक प्रसिद्ध पाइथ़ागोरियन विद्वान और यांत्रिकी के ज्ञाता थे,

उनका यह चित्र फ़ुल्वियस उर्सिनस के एक प्राचीन कांस्य सिक्के पर पाया गया है।)

जिन विद्वानों के कामों का मैंने अध्ययन किया है, उनके पर्याप्त संदर्भ नोट्स में दिए गए हैं।

अब जो रह जाता है वह है सबसे पहले अपने मित्र डॉ जॉन के इन्ग्राम (Dr. John K. Ingram), ट्रिनिटी कॉलेज, डबलिन (Trinity College, Dublin) के वरिष्ठ विद्वान (Senior Fellow), को धन्यवाद ज्ञापित करता हूँ जिनके, इस पुस्तक की शुरुआत से और लिखे जाने के दौरान, सहयोग का मैं बहुत ऋणी हूँ। वास्तव में Hermathena जैसी पत्रिका (periodical), जो कि डॉ इन्ग्राम द्वारा सम्पादित होती थी, में सादर स्थान दिए बिना इसे लिखा जाना सम्भव नहीं होता। अपनी ढेर सारी और कठिन

दायित्वों, और ख़ुद के अपने महत्वपूर्ण साहित्यिक कामों के बीच, वह अपने सदय प्रोत्साहन और सही मत से मेरी सहायता के लिए सदैव तत्पर रहे हैं।

इसके बाद अपने दिवंगत दोस्त और सहकर्मी डॉ जॉन एफ़ डेविस (Dr. John F. Davies) क्वीन्स कॉलेज, गॉलवे (Queen's College, Galway) के लैटिन के प्रोफ़ेसर के बड़े एहसानों का ऋणी हूँ, इनकी हाल में हुई मृत्यु पर मैं दुख प्रकट करता हूँ। Hermathena के बाद के लेखों में उनके सलाह और बहुमूल्य सुझावों से मुझे बड़ी सहायता मिली: उन्होंने सहृदयता के साथ अनुवादों पर नज़र रखी जो कि शुद्ध गणितीय नहीं थे; उन्होंने बड़े ध्यान से प्रूफ़ में संशोधन किया और महत्वपूर्ण नोट्स जोड़े। मैं डॉ डेविस का उल्लेख एक बार बिना यह बताए नहीं समाप्त कर सकता कि विद्वान के रूप में वो दुर्लभ थे, सीखने का उनका मनोयोग नि:स्वार्थ था, और वैयक्तिक चरित्र महान था।

उपसंहार करते हुए मैं इस काम को डबलिन यूनिवर्सिटी प्रेस सिरीज़ में शामिल करने के लिए ट्रिनिटी कॉलेज, डबलिन के प्रधानाचार्य और वरिष्ठ विद्वानों (Provost and Senior Fellows) का धन्यवाद ज्ञापित करता हूँ।

जॉर्ज जे. ऑलमॅन

क्वीन्स कॉलेज, गॉलवे

जनवरी 10वाँ, 1889

अनुवादक का वक्तव्य

जॉर्ज जॉन्सटन ऑलमॅन की इस पुस्तक के अनुवाद का बीड़ा उठाना मेरे लिए पहले तो साहस का काम था। अनुवाद में ज्यों ज्यों मैं आगे बढ़ता गया, यह साहस दुस्साहस में बदलता गया। कहानियों की तरह कि सोने का तोता दस दरवाज़ों के बाद मिलेगा, और हर दरवाज़ा कठिन से कठिनतर होता गया। पुस्तक की भूमिका नामक अध्याय तो जैसे चुटकियों का खेल हो, सोचा कुछेक महीनों में पूरा कर लूँगा। पुस्तक का अनुवाद करने में मुझे डेढ़ साल से ऊपर का समय लगा। पहले मुझे HERMATHENA में प्रकाशित लेखों का संग्रह मिला Hathi Trust के वेबसाइट से, बाद में मुझे इन लेखों का किताब के रूप में संकलन 'GREEK GEOMETRY - From THALES to EUCLID मिली। यह किताब Dublin University Press Series के अंतर्गत 1889 में प्रकाशित की गई थी। इन दोनों के बीच अंतर तो है लेकिन बहुत कम है फिर भी मिलान करना ही था। किताब पर लेखक के बारे में इस प्रकार लिखा गया है:

GEORGE JOHNSTON ALLMAN, LL.D., D.Sc.;

FELLOW OF THE ROYAL SOCIETY;

PROFESSOR OF MATHEMATICS IN QUEEN'S COLLEGE, GALWAY;

MEMBER OF THE SENATE OF THE ROYAL UNIVERSITY OF IRELAND.

प्रकाशक का विवरण इस प्रकार दिया गया है:

DUBLIN : HODGES, FIGGIS, & CO., GRAFTON-STREET.

LONDON: LONGMANS, GREEN, & CO., PARTERNOSTER-ROW.

थ़ेल्स (तालेस) के अध्याय के बाद जब पाइथ़गोरस के अध्याय में प्रवेश किया तो होश उड़ गए। संदर्भ, नोट्स और उद्धरण ग्रीक, लैटिन, फ्रेंच, जर्मन में मिलने शुरू हुए तो एक बार तो मन किया कि अनुवाद छोड़ दूँ। मैं इन भाषाओं का जानकार तो हूँ नहीं। गूगल ट्रांसलेट की शरण में गया तो सटीक अनुवाद नहीं मिल सका। तब मैंने आर्टिफ़िशियल इंटेलिजेंस को खँगाला तो थोड़ी राहत महसूस हुई। लेकिन फिर भी सटीकता संदेहास्पद थी। इस तरह प्राप्त अनुवाद पर बार बार मनन करना पड़ा। ग्रीक की-बोर्ड डाउनलोड किया। और ग्रीक डिक्शनरी को भी डाउनलोड किया। आर्टिफ़िशियल इंटेलिजेंस ने रेखागणित के कई प्रमेयों पर त्रुटिपूर्ण सलाह दी, सटीकता सुनिश्चित करने के लिए मैंने यूक्लिड के प्रतिज्ञप्तियों की मूल किताब डाउनलोड की और पुस्तक में संदर्भित प्रमेयों और निर्मेयों की जाँच यूक्लिड की मूल किताब के माध्यम से की।

पुस्तक में अनगिनत यूरोपीय नाम आए, उनका हिंदी में सही उच्चारण प्राप्त करने के लिए howtopronounce.com का इस्तेमाल किया। फिर भी नामों के हिंदी उच्चारण के साथ अंग्रेज़ी नाम भी दिए गए हैं, जिससे कि कोई त्रुटि न हो।

इस अनुवाद में मूल पुस्तक में दिए गए रेखांकनों को पहले ज्योमेट्री बॉक्स के माध्यम से बनाने की कोशिश की गई, लेकिन सफलता नहीं मिली। फिर वर्ड्स के Insert

—shapes की सहायता से रेखांकन तैयार किया गया। दिक़्क़तें इसमें भी पेश आईं, लेकिन मूल रेखांकन से मिलता जुलता रेखांकन तैयार किया गया। हो सकता है कि ये रेखांकन रेखागणित के रचना पद्धति के अनुसार न हों, लेकिन जहाँ तक सम्भव हो सका ये रेखांकन मूल रेखांकन से मिलते जुलते हैं, एक प्रस्तुति के रूप में जिससे कि इबारत समझ में आ जाए। कुछ रेखांकनों को मैंने बात को समझाने के लिए अपनी तरफ़ से भी जोड़ा है। कई पारिभाषिक शब्दों को हिंदी में सोचना पड़ा। फिर भी कुछ शब्द हैं जिनको हिंदी में व्यक्त कर पाना कठिन था, जैसे कि quadratrix, abscissa, ordinate आदि।

प्रस्तावना में लेखक के वक्तव्य के विपरीत मैंने इस पुस्तक में सरनामा (headings) और अनुक्रमणिका नहीं दी है। अनुवादक हाईस्कूल तक ही रेखागणित पढ़ा है, लेकिन इस बिना पर अनुवादक की त्रुटियाँ अक्षम्य नहीं हो सकतीं। यह पुस्तक ई-बुक की शक्ल में है, अत: किसी सुधार की गुंजाइश बनी रहेगी। जहाँ तक हो सका, मैंने अनुवाद को सरल बनाया जिससे कि आम पाठक भी पढ़ सके। लेकिन यह विशुद्ध वैज्ञानिक काम है, अत: कहीं कहीं भाषा शायद कठिन लगे। फिर भी यह पुस्तक रेखागणित के छात्रों के लिए उपयोगी हो सकती है।

मुझे प्रसन्नता होगी यदि यह पुस्तक अध्येताओं के किसी काम आ सके। इस आशा के साथ प्रस्तुत है यह पुस्तक।

(डॉ) बिभाष कुमार श्रीवास्तव

दिनांक:

लखनऊ

भूमिका[1]

यूनान में विज्ञान के विकास के अध्ययन के लिए दो युगों की ध्यानपूर्वक पहचान की जानी चाहिए।

यूनानी दर्शन के संस्थापक, थ़ेल्स या थ़ालेस (Thales) और पाइथ़गोरस (Pythagoras), जो कि यूनानी विज्ञान के भी संस्थापक रहे हैं, और थ़ेल्स के समय से लेकर यूक्लिड (Euclid) तक और अलेक्ज़ेंड्रिया में ज्ञान और अनुसंधान केंद्र (Museum of Alexandria: ***अनुवादक की ओर से:*** *Museum का तात्पर्य आधुनिक समय के संग्रहालय से नहीं है। यह शब्द ग्रीक शब्द Μουσείον—मौसियोन से बना है जिसका अर्थ होता है ज्ञान और अनुसंधान का केंद्र*) की स्थापना तक विज्ञान का बहुत सा हिस्सा यूनानी दार्शनिकों द्वारा विकसित किया गया था। अलेक्ज़ेंड्रिया स्कूल

---

[1] ऐसा अक्सर देखा गया है और वास्तव में आमतौर पर स्वीकार भी किया जाता है कि वर्तमान शताब्दी की विशेषता ऐतिहासिक शोधों को महत्व देने के कारण है, और इतिहास के दर्शन में विस्तृत रूप में प्रचलित लोगों की रुचि के कारण है।

गणित में हमारे पास प्रचलित दो मत और धाराएँ है:

पहला: गणित के इतिहास पर हाल ही में प्रकाशित कई अध्ययन, उदाहरण के तौर पर Arneth, A., *Die Geschichte der reinen Mathematik,* Stuttgart, 1852; *Bretschneider, C. A., *die Geometrie und die Geometer vor Euklides,* Leipzig, 1870; Suter, H., *Geschichte der mathematischen Wissenschaften* (1st Part), Zurich, 1873; *Henkel, H., *zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittel-alter,* Leipzig, 1874 (मरणोपरांत प्रकाशित); *Hoefer, F., *Histoire des Mathématiques,* Paris, 1874. (यह M. Hoefer द्वारा रचित विज्ञान के इतिहास का पाँचवा खंड है और ये सभी *Histoire Universelle का भाग हैं और* M. Duruy के निर्देशन में प्रकाशित हुए थे)। इस विषय पर अध्ययन करते समय मैंने तारांकित* पुस्तकों का अध्ययन किया है। यद्यपि कि M. Hoefer का अध्ययन बहुत ज़्यादा आध्यात्मिक है, और लापरवाही एवं ग़लतियों से मुक्त नहीं है, फिर भी मैंने पाइथ़ागोरस और उनके विचारों के बारे में लिखे गए हिस्से का फ़ायदा उठाया है। Hankel की किताब के कुछ प्रकरण गणित के इतिहास पर महान अध्ययन हैं, जो कि लेखक की मृत्यु के कारण अपूर्ण रह गए। सौभाग्यवश थ़ेल्स से शुरू होकर अलेक्ज़ेंड्रिया स्कूल की स्थापना तक यूनानी गणित के पहले दौर के हिस्सा पूरा हो सका। यह एक उत्कृष्ट अध्ययन है, और अपने कई हिस्सों में यह गम्भीर और मौलिक है। M. Bretschneider का मोनोग्राफ़ बहुमूल्य है, और यूनानियों में ज्यामिति की शुरुआत को लेकर इस अध्ययन के पहले के सभी अध्ययनों के मुक़ाबले यह अग्रगामी है। प्राचीन लेखकों के लिखे हुए और बिखरे प्रकरणों को उन्होंने बहुत सावधानी से एकत्रित किया और मौलिक रूप में प्रस्तुत किया है; मुझे इन उल्लेखों से बहुत सहायता मिली है।

दूसरा: प्राचीन गणितीय अध्ययन के नए संसकरण जिनमें से कुछ तो अत्यंत ही दुर्लभ हैं, यथा:

Theodosii *Sphaericorum libri Tres,* Nizze, Berolini, 1852; Nicomachi Geraseni *Introductionis Arithmeticae,* lib. II., Hoche, Lipsiae, 1866 (Teubner); Boetii de *Inst. Arithum., &c.* ed. G. Friedlein Lipsiae, 1867 (Teubner); Procli Diadochi *in premium Euclidis Elementorum librum commentarii,* ex recog. G. Friedlein, Lipsiae, 1873 (Teubner); Heronis Alexandrini *Geometricorum et Stereometricorum Reliquiae e libris manuscriptis,* edidit F. Hultsch, Berolini, 1864; Pappi Alexandrini *Collectiones quae supersunt e libris manuscriptis Latina interpretatione et commentariis* instruxit F. Hultsch, Vol. I, Berolini, 1876: vol, II, *ib.,* 1877.

Pappus के लिखे में से यूनानी लेख-पाठ (Text) के हिस्से ही कई बार प्रकाशित हुए (देखें De Morgan in Dr. W. Smith's *Dictionary of Biography*). यूक्लिड, ऍपोलोनियस, और आर्कमिडीज़ के जीवन को समाहित करता हुआ पिछली शताब्दी में प्रकाशित ऑक्सफ़ोर्ड संस्करण बहुत माँग में है।

(School of Alexandria) की स्थापना के साथ दूसरी अवधि शुरू होती है; और इस यहाँ से यूनान का वैज्ञानिक विकास और विज्ञान का संवर्धन दर्शन से स्वतंत्र हो कर अपनी राह पर चलने लगा।

इस किताब के माध्यम से मैं पहली अवधि के दौरान ज्यामिति के विकास का कुछ विवरण प्रस्तुत करना चाहता हूँ और इसके मुख्य अंगों के विकास पर नज़र डालना चाहूँगा।

ज्यामिति के प्रारम्भिक इतिहास के बारे में प्रामाणिक सामग्री के लिए हम प्राचीन लेखकों के यत्र तत्र बिखरे लेखों पर आश्रित हैं, इनमें से ज़्यादातर सामग्री दुर्भाग्य से अब अनुपलब्ध, यूडेमस ऑफ़ रोड्स (Eudemus of Rhodes), जो कि अरस्तू के एक प्रमुख शिष्य थे, की किताब *History of Geometry* से ली गई है। प्रस्तावित अवधि के दौरान ज्यामिति का इतिहास, जिस पर कि मैं विमर्श प्रस्तुत करने जा रहा हूँ वह प्रोक्लस (Proclus) द्वारा बचा कर रखा गया है, बहुत सम्भावना है कि उन्होंने इसे यूडेमस (Eudemus) की सामग्री से प्राप्त किया हो। मैं इसे यहीं विस्तार में प्रस्तुत कर रहा हूँ क्योंकि मैं आगे के पृष्ठों में बार बार इसका उल्लेख करूँगा।

प्राचीन कथा के अनुसार ज्यामिति के उद्भव का श्रेय मिस्र के लोगों को दिया जाता है जिन्होंने नील नदी की बाढ़ से नष्ट हुई ज़मीनी निशानियों को पुनर्स्थापित करने के लिए इसकी खोज की, और इसे आश्चर्यजनक नहीं मानना चाहिए कि विज्ञान विधियाँ ज़रूरतों की वजह से उपजी होंगी, और फिर विज्ञान के विकास के क्रम में ऐंद्रिक अनुभव किस तरह से सोच में बदली होगी और फिर ज्ञान में। प्रोक्लस कहते हैं कि:—

थ़ेल्स मिस्र का भ्रमण कर पहले पहल इस ज्ञान को यूनान लाए; उन्होंने कई बातों की खोज स्वयम् की, और उसके शुरुआती ज्ञान को अपने उत्तराधिकारियों को बताया, कुछ मामलों में उन्होंने अमूर्त या वैचारिक तरीक़ा (καθολικώτερον—काथ़ोलीकोतेरोन— abstract— सार्वभौमिक या सामान्यतया लागू/ निगमनात्मक) अपनाया, तो कुछ मामलों में अंतर्ज्ञान या व्यावहारिक तरीक़ा (αίσθηλικώτερον—एस्थ़ीतीकोतेरोन— intuitional or sensible—संदर्भ विशेष के अनुसार) अपनाया।

उनके बाद अमेरिस्टस या ममॅरकस (Ameristus या Mamercus), जो कि कवि स्टॅसिकोरस (Stesichorus) के भाई थे का नाम ज्यामिती के अध्ययन में उनकी धुन के कारण लिया जाता है; और हिपियस ऑफ़ एलिस (Hippias of Elis) ने दर्ज कर रखा है कि अपने ज्यामिति ज्ञान के कारण उन्होंने कुछ ख्याति हासिल की।

उनके बाद पाइथ़ागोरस ने इसे वैज्ञानिक अध्ययन का स्वरूप प्रदान किया, इसके सिद्धांतों को तत्व विवेचना के रूप में प्रस्तुत किया और इसके प्रमेयों/सूत्रों को बिना किसी भावनात्मक लगाव के बौद्धिक दृष्टिकोण (άϋλως καί νοερώς—आऊलोस कई नोएरोस—अभौतिक और बौद्धिक) के साथ प्रस्तुत किया; उन्होने अपरिमेय परिमाणों/राशियों (τών άλόγων πραγματείαν—तोन अलॊगोन प्रग्मतीयन—अपरिमेय राशियों से सम्बंधित) के सिद्धांत और लौकिक (नियमित ठोसों) आकृतियों के निर्माण की खोज की।

उनके बाद ऍनॅक्सागोरस ऑफ़ क्लाज़ोमेनी (Anaxagoras of Clazomenae) ने ज्यामिती में बहुत योगदान दिया, ईनोपिडीज़ ऑफ़ कियोस/चियोस/कायास

(Oenopides of Chios), जो कि ऍनॅक्सागोरस से कुछ कनिष्ठ थे, ने भी योगदान दिया। प्लेटो ने भी अपनी "Rivals" में उनके गणित के ज्ञान के कारण इनका उल्लेख किया है।

इनके बाद, हिपॉक्रिटीज़ ऑफ़ कियोस/चियोस/कायास (Hippocrates of Chios)—जिन्होंने चंद्रखण्ड के चतुर्भुजीकरण (quadrature of lune) की खोज की, और तीयडोरस ऑफ़ साइरीनि (Theodorus of Cyrene) ज्यामिति में प्रसिद्ध हुए। जिन लोगों के नाम हमारे पास हैं उनमें हिपॉक्रिटीज़ हैं जो Elements के पहले लेखक हैं।

प्लेटो, जो कि इन सबके बाद हुए, ने ज्यामिती के विकास में और अन्य गणितीय विज्ञान में अपने अध्ययन और गणित सम्बंधी अपने लेखन से योगदान दिया। उनके समकालीनों में थे लियोदामेस ऑफ़ थ़ासोस, आर्कितास/आर्चिदास ऑफ़ टॅरेन्टम, और तियटीटस ऑफ़ एथ़ेंस (Leodamas of Thasos, Archytas of Tarentum, Theaetetus of Athens) जिन्होंने नए प्रमेय जोड़े या उनको को अधिकाधिक वैज्ञानिक आधार दिया।

लियोदामेस के उत्तराधिकारी नियोक्लाईड्स (Neocleides) और उनके शिष्य लियॉन (Leon) थे जिन्होंने पहले की उपलब्धियों में बढ़ोतरी की। लियॉन ने भी Elements की रचना की जिसमें बहुत सारे सिद्ध प्रमेयों को उनके महत्व के अनुसार सावधानी से संकलित किए गए हैं; उन्होंने निर्धारण (διορισμός— दियरिस्मोस— determination— स्पष्ट निर्धारण) नामक निर्मेय के एक अंश का समाधान प्रस्तुत किया, एक कसौटी जिससे यह तय की जा सके कि कोई निर्मेय कब सम्भव है और कब असम्भव। (**अनुवादक की ओर से:** निर्धारण के सिद्धांत के अनुसार कोई भी

ज्यामितीय आकृति विशिष्ट शर्तों से निर्धारित होती है, जैसे कि कोई सीधी रेखा दी गई दो बिंदुओं से निर्धारित होती है, एक वृत्त दिए गए केन्द्र और त्रिज्या से निर्धारित होता है, आदि।)

ईयुडोकस ऑफ़ नाइडस (Eudoxus of Cnidus) जो कि लियॉन से उम्र में थोड़े छोटे थे और प्लेटो के एक शिष्य के साथी थे, सर्वप्रथम तो सार्वलौकिक प्रमेयों की संख्या में इज़ाफ़ा किया और पहले से ही मौजूद समानुपात (Proportions) में तीन और समानुपात (Proportion) जोड़े और खंडों-Sections[2] को लेकर प्लेटो द्वारा शुरू किए गए अध्ययन और विश्लेषण पद्धति (ταϊς άναλύσεσιν—तइस अनालूसेसिन—विश्लेषण की पद्धति) हेतु उसके इस्तेमाल पर आगे काम किया।

एमिक्लास ऑफ़ हेराक्लिया (Amyclas of Heraclea) जो कि प्लेटो का एक साथी था और मेनेएक्मस (Menaechmus) जो कि ईयुडोकस (Eudoxus) का शिष्य और प्लेटो का साथी भी था और उसका भाई डाइनोस्ट्रॅटस (Deinostratus) ने ज्यामिति को और मुकम्मल बनाने का काम किया। थ़ियोडियस ऑफ़ मैग्नेशिया (Theudius of Magnesia) जो कि गणित और दर्शन की कई शाखाओं के लिए प्रख्यात रहा होगा, ने Elements को उत्कृष्ट तरीक़े से व्यवस्थित किया और विशेषीकृत प्रमेयों (propositions) को सार्वलौकिक आधार दिया। ऍथ़ेनियस ऑफ़ सिज़िकस या सिज़िसिनस ऑफ़ एथ़ेन्स (Athenaeus of Cyzicus or Cyzicinus of Athens)

---

[2] क्या इसका मतलब सीधी रेखा को चरम-extreme एवं माध्य अनुपातmean ratio में काटना-"*sectio aurea" है? या फिर यह शंकु खण्डों*-conic section की खोज से सम्बंधित है? पहली बात की ज़्यादा *सम्भावना है। यूक्लिड के Elements,* Lib., xiii, के अनुसार किसी रेखा को extreme और mean ration मे काटने से सम्बंधित प्रमेयों में उनके द्वारा विश्लेषण-analysis और संश्लेषण-synthesis का पहली बार इस्तेमाल और उन्हें परिभाषित किया गया है-संदर्भ Bretschneider, *Die Geometric vor Euklides* p. 168

भी लगभग उसी समय अन्य गणितीय अध्ययनों, विशेषकर ज्यामितीय अध्ययन के लिए विख्यात हुए। ये सब लोग Academy में अक्सर आते रहते और अपने शोध को साझा करते। (**अनुवादक की ओर से:** *Academy वर्ष 387 ईपू के आसपास प्लेटो द्वारा स्थापित एक अध्ययन केन्द्र था। यहाँ एक लम्बी अवधि तक दर्शन और गणित पर शोध चलते रहे। ग्रीक मिथक कथाओं के अनुसार एथेंस की रक्षा में अकॅडीमस—Academus की भूमिका के एवज़ में उनकी ज़मीनों को बख़्श दिया गया। उनकी मृत्यु के बाद इस सम्पत्ति को Akademeia नाम दिया गया और यह प्लेटो की सम्पत्ति हो गई। इसी भूमि पर प्लेटो ने Academus के नाम पर Academy की स्थापना की*)।

हरमोडिमस ऑफ़ कोलाफ़ेन (Hermotimus of Colophon) ने ईयुडोकस और तियटीटस के काम को और आगे बढ़ाया और Elements के ढेर सारे सिद्धान्तों की खोज की और बिंदुपथ (Loci) पर कुछ लिखा। फिलिपस मेंडियस या मेडमियस (Philipus Mendaeus या Medmius), जो कि प्लेटो के शिष्य थे और जिन्हें उन्होंने गणितीय अध्ययन की तरफ़ आकर्षित किया, ने प्लेटो के अधीन शोध किया और अपनी समझ के अनुसार प्लेटो के दर्शन को विकसित करने पर अध्ययन किया। इस प्रकार जिन लोगों ने ज्यामिति के इतिहास पर लिखा, उन लोगों ने विज्ञान को विकसित किया।[3]

प्रोक्लस आगे कहते हैं कि यूक्लिड की उम्र इनके मुक़ाबले बहुत कम नहीं थी; उन्होंने Elements को इकट्ठा किया, जो कि ज़्यादातर ईयुडोकस द्वारा खोजा गया था उसको व्यवस्थित किया और तियटीटस (Theaetetus) द्वारा शुरू किए गए बहुत से

[3] इन बातों से यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि यह सम्भवतः यूडेमस रचित History of Geometry के बारे में है क्योंकि वो यहाँ संदर्भित काल में हुए थे और प्रोक्लस ने अन्य जगहों पर भी उनके इतिहास का उल्लेख किया है-Proclus, ed. Friedlein, pp. 299, 333, 352, and 379

कामों को पूरा किया; इसके अतिरिक्त अपने पूर्ववर्ती शोधकर्ताओं के कमज़ोर स्थापन को अकाट्य सबूत से प्रतिस्थापित किया। वह टॉलमी (Ptolemy) प्रथम के शासन में हुआ था। ऐसा कहा जाता है कि टॉलमी ने उनसे एक बार कहा कि क्या ज्यामिति के ज्ञान के लिए Elements से आसान कोई तरीक़ा है। उन्होंने जवाब दिया था कि ज्यामिति समझने के लिए कोई शाही रास्ता (royal road) नहीं है। यूक्लिड प्लेटो के शिष्यों के मुक़ाबले कम उम्र का था लेकिन अपने समकालीन इरातोस्थॅनीज़ (Eratosthenes) और आर्कमिडीज़ (Archemedes), जिनका बाद में ज़िक्र किया जाएगा, से बड़ा था। वह प्लेटो का मतावलम्बी था, और उनके दर्शन से परिचित था। यह इस बात से स्पष्ट होता है कि उसने ख़ुद ही कहा है कि Elements को व्यवस्थित करने का उसका चरम लक्ष्य है प्लेटॉनिक पिंडों (Pltonic bodies-The Regular solids) की रचना।[4]

[4] Procli Diadochi *in premium Euclidis Elementorum librum commentarii.* Ex recognitione G. Friedlein. Lipsiae, 1873, pp. 64-68